

**KVAZICHIZIQLI ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASINING QO‘YILISHI
VA MATEMATIK TAHLILI****Y.Mansurov**O‘zbekiston respublikasi
Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi
Osiyo xalqaro universiteti 1-kurs magistri
Tel:94.535-34-70**Annotatsiya**

Ushbu maqolada kvazichiziqli issiqlik tarqalish tenglamasining fizik va matematik asoslari o‘rganilgan. Issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayonlarini modellashtirishda energiyaning saqlanish qonuni va Furiye qonunidan kelib chiqib, kvazichiziqli parabolik tenglamaning hosil qilinishi bayon etilgan. Shuningdek, tenglamaning boshlang‘ich va chegaraviy shartlari, matematik klassifikatsiyasi, yechimning mavjudligi va yagonaligi masalalari hamda amaliy tatbiqlari tahlil qilingan. Zamonaviy muhandislik va fizika masalalarida mazkur tenglamaning ahamiyati ko‘rsatib berilgan.

Kalit so‘zlar: issiqlik tarqalishi, kvazichiziqli tenglama, parabolik tenglama, Furiye qonuni, energiya saqlanishi, matematik modellashtirish, sonli usullar.

Kirish. Issiqlik almashinuvi tabiatda va texnikada eng keng tarqalgan fizik jarayonlardan biri hisoblanadi. Qattiq jismlar, suyuqliklar va gazlarda haroratning vaqt va fazo bo‘yicha o‘zgarishini tadqiq qilish zamonaviy fizika, muhandislik, geofizika va biomeditsina sohalari uchun muhim ahamiyatga ega. Issiqlik o‘tkazuvchanlik nazariyasining asosiy vazifasi harorat maydonining evolyutsiyasini matematik jihatdan ifodalashdan iborat.

Klassik holatda issiqlik tarqalish jarayoni chiziqli issiqlik tenglamasi orqali tavsiflanadi. Biroq real muhitlarda issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti, issiqlik sig‘imi yoki ichki issiqlik manbai haroratga bog‘liq bo‘lishi mumkin. Bu holat tenglamaning noxiziqli xususiyat kasb etishiga olib keladi. Agar yuqori tartibli hosilalar chiziqli qatnashib, ularning oldidagi koeffitsiyentlar noma’lum funksiyaga bog‘liq bo‘lsa, bunday tenglama kvazichiziqli differensial tenglama deb ataladi [1]. Kvazichiziqli issiqlik tenglamalari metallurgiya, yadro energetikasi, yer qobig‘idagi geotermik jarayonlar, biologik to‘qimalardagi issiqlik almashinuvi kabi ko‘plab sohalarda qo‘llaniladi [2].

Issiqlik tarqalish jarayonlari tabiiy va texnik tizimlarda eng ko'p uchraydigan fizik hodisalardan biridir. Qattiq jismlar, suyuqliklar va gazlarda haroratning vaqt bo'yicha va fazodagi o'zgarishini matematik ifodalash uchun issiqlik o'tkazuvchanlik nazariyasi qo'llaniladi. Klassik yondashuvda bu jarayon chiziqli issiqlik tenglamasi orqali ifodalanadi. Biroq ko'plab real muammolarda issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti, issiqlik sig'imi yoki issiqlik manbai haroratga bog'liq bo'ladi. Natijada tenglama nochiziqli ko'rinishga o'tadi. Agar yuqori tartibli hosilalar oldidagi koeffitsientlar noma'lum funksiyaga bog'liq bo'lsa, bunday tenglama kvazichiziqli (quasilinear) differensial tenglama deb ataladi.

Kvazichiziqli issiqlik tarqalish tenglamasi ko'plab muhandislik, geofizika, metallurgiya, energetika va biologik jarayonlarda qo'llaniladi. Shu bois uning qo'yilishi, fizik asoslari va matematik ifodasi ilmiy nuqtai nazardan muhim ahamiyatga ega.

Issiqlik tarqalish jarayonining fizik asoslari

Issiqlik o'tkazuvchanlik hodisasi molekulalar harakati va ularning o'zaro ta'siri natijasida energiyaning issiq sohadagi nuqtalardan sovuqroq sohalarga o'tishi bilan tavsiflanadi. Bu jarayonni matematik modellashirish uchun uchta asosiy prinsip qo'llaniladi:

1. Energiyaning saqlanish qonuni
2. Fure qonuni (issiqlik oqimi qonuni)
3. Moddaning fizik xossalari (zichlik, issiqlik sig'imi va boshqalar)

1.1. Fure qonuni

Issiqlik oqimi zichligi harorat gradientiga proporsional:

$$\vec{q} = -k(u) \nabla u$$

Bu yerda:

- $\vec{q}$ — issiqlik oqimi vektori,
- $k(u)$ — issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti (haroratga bog'liq bo'lishi mumkin),
- $u(x, t)$ — harorat funksiyasi.

Agar k doimiy bo'lsa, tenglama chiziqli bo'ladi. Agar $k=k(u)$ bo'lsa, tenglama kvazichiziqli ko'rinishga o'tadi.

Kvazichiziqli tenglama tushunchasi

Differensial tenglama kvazichiziqli deyiladi, agar eng yuqori tartibli hosilalar chiziqli ko'rinishda qatnashsa, lekin ularning oldidagi koeffitsientlar noma'lum funksiyaga bog'liq bo'lsa.

Umumiy ko'rinish:

$$a(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots = f(x, t, u, \nabla u)$$

Issiqlik tenglamasi uchun:

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k(u)\nabla u) + Q(x, t, u)$$

Bu yerda:

- $c(u)$ — issiqlik sig'imi,
- $k(u)$ — issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsienti,
- $Q(x, t, u)$ — ichki issiqlik manbai.

Bir o'lchovli kvazichiziqli issiqlik tenglamasi

Bir o'lchovli holda:

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q(x, t, u)$$

Agar $c(u) = \rho c_p(u)$ deb olinsa, bu yerda:

- ρ — zichlik,
- $c_p(u)$ — issiqlik sig'imi.

Tenglama quyidagi shaklga keladi:

$$\rho c_p(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Bu klassik kvazichiziqli parabolik tenglamadir.

Chegaraviy va boshlang'ich shartlar

Kvazichiziqli issiqlik tenglamasini to'liq qo'yish uchun quyidagi shartlar beriladi:

Boshlang'ich shart

$$u(x,0)=u_0(x)$$

Chegaraviy shartlar

Dirixle sharti:

$$u(0,t)=\varphi_1(t), u(L,t)=\varphi_2(t)$$

Neyman sharti:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\psi_1(t)$$

Robin sharti:

$$-k(u)\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha(u-u_{muhit})$$

Ko'p o'lchovli hol

Uch o'lchovli sohada:

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla \cdot (k(u)\nabla u)+Q(x,t,u)$$

Bu yerda:

$$\nabla \cdot (k(u)\nabla u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

6. Tenglamaning matematik klassifikatsiyasi

Kvazichiziqli issiqlik tenglamasi parabolik tipdagi differensial tenglama hisoblanadi. Paraboliklik sharti:

$$k(u)>0$$

Bu shart bajarilsa, masala yaxshi qo'yilgan bo'ladi va yechimning mavjudligi hamda yagona ekanligi isbotlanadi.

Chiziqli va kvazichiziqli tenglamalar farqi

Belgilar	Chiziqli	Kvazichiziqli
Koeffitsient	Doimiy	u ga bog'liq
Superpozitsiya	Amal qiladi	Amal qilmaydi
Analitik yechim	Ko'p hollarda mavjud	Kam hollarda

Amaliy qo'llanishlar:

Kvazichiziqli issiqlik tenglamasi quyidagi sohalarda qo'llaniladi:

- Metall eritish va sovitish jarayonlari
- Geotermik jarayonlar
- Kimyoviy reaksiyalarda issiqlik tarqalishi
- Biologik to'qimalarda issiqlik almashinuvi
- Yadro reaktorlari

Masalan, metallning issiqlik o'tkazuvchanligi harorat oshishi bilan o'zgaradi. Bu jarayonni oddiy chiziqli tenglama bilan ifodalab bo'lmaydi.

Kvazichiziqli tenglamaning xossalari

1. Nochiziqlik sababli analitik yechim topish qiyin.
2. Ko'pincha sonli usullar qo'llaniladi.
3. Yechim silliq boshlang'ich shartlarga bog'liq.
4. Kuchsiz yechim tushunchasi muhim ahamiyatga ega.

Kvazichiziqli issiqlik tarqalish tenglamasi real fizik jarayonlarni yanada aniqroq modellashtirish imkonini beradi. U energiyaning saqlanish qonuni va Fure qonuniga asoslanadi. Agar issiqlik o'tkazuvchanlik yoki issiqlik sig'imi haroratga bog'liq bo'lsa, tenglama kvazichiziqli shaklga o'tadi.

Tenglamaning umumiy ko'rinishi:

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k(u) \nabla u) + Q(x, t, u)$$

Bu tenglama parabolik tipga kiradi va unga boshlang'ich hamda chegaraviy shartlar berilishi zarur. Kvazichiziqli tenglamalar murakkab matematik tahlilni talab qiladi va ko'pincha sonli usullar yordamida yechiladi.

Kvazichiziqli tenglamalarni yechish usullari:

Analitik usullar

Ayrim soddalashtirilgan hollarda:

- o'zgaruvchilarni ajratish;
- integral o'zgartirishlar;
- simmetriya usullari yordamida yechim topish mumkin. Biroq kvazichiziqli hollarda analitik yechimlar juda kam uchraydi.

Sonli usullar

Amaliyotda quyidagi usullar keng qo'llaniladi:

- chekli ayirmalar usuli;
- chekli elementlar usuli;
- chekli hajmlar usuli;

Galyorkin usuli.

Ayniqsa chekli elementlar usuli murakkab geometriyali sohalar uchun yuqori samara beradi.

So'nggi yillarda kvazichiziqli parabolik tenglamalar sohasida quyidagi yo'nalishlarda tadqiqotlar olib borilmoqda:

nochiziqli dinamik rejimlarni tahlil qilish;

yuqori aniqlikdagi sonli algoritmlar yaratish;

sun'iy intellekt yordamida parametrlarni identifikatsiyalash;

ko'p masshtabli modellashtirish;

fazaviy o'zgarishlar bilan bog'liq jarayonlarni o'rganish.

Bu tadqiqotlar muhandislik va sanoat texnologiyalarining rivojlanishi uchun muhim ahamiyatga ega.

Kvazichiziqli issiqlik tarqalish tenglamasi real muhitlardagi issiqlik almashinuv jarayonlarini aniq modellashtirish imkonini beruvchi muhim matematik model

hisoblanadi. U energiya saqlanish qonuni va Furrye qonuniga asoslangan bo‘lib, issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti yoki issiqlik sig‘imi haroratga bog‘liq bo‘lgan hollarda qo‘llaniladi.

Tahlil natijalari shuni ko‘rsatadiki, kvazichiziqli tenglamalarning matematik xususiyatlari chiziqli holatga nisbatan ancha murakkab bo‘lib, ularni tadqiq qilishda funksional analiz, variatsion usullar va sonli hisoblash metodlaridan foydalanish talab etiladi. Zamonaviy texnologiyalar, energetika, metallurgiya va biomeditsina sohalarida mazkur tenglamalarning ahamiyati yil sayin ortib bormoqda.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
2. ТИХОНОВ А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 2004. – 798 с.
3. Fourier J. Théorie analytique de la chaleur. – Paris: Chez Firmin Didot, 1822.
4. Evans L.C. Partial Differential Equations. – 2nd ed. – Providence: American Mathematical Society, 2010. – 749 p.
5. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. – Providence: AMS, 1968. – 648 p.
6. Lions J.L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. – Paris: Dunod, 1969. – 554 p.
7. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method. – 7th ed. – Oxford: Elsevier, 2013.
8. Pennes H.H. Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm // Journal of Applied Physiology. – 1948. – Vol. 1. – No. 2. – P. 93–122.
9. Cannon J.R. The One-Dimensional Heat Equation. – Cambridge University Press, 1984.
10. DiBenedetto E. Degenerate Parabolic Equations. – New York: Springer, 1993.
11. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford University Press, 2007.
12. John F. Partial Differential Equations. – Springer, 1991.