

BIRINCHI AJOYIB LIMITNING TADBIIQI

Bebutova Zulayxo Hamidovna

Toshkent Moliya Instituti

Oliy va amaliy matematika kafedrası o'qituvchisi

Annotatsiya

Matematika fanini o'qitishda har bir masalani atroflicha yoritib berish muhim ahamiyat kasb etadi. Birinchi ajoyib limitning tadbiiqi ham yuzalarni hisoblashda bir qancha qulayliklarni keltiradi. Ushbu maqolada ajoyib limit tadbiiqlari ko'pburchaklarning yuzalarni hamda jismlarning hajmlarini hisoblash uchun qo'llanilgani ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar

Ajoyib limit, yuza, prizma hajmi, konus hajmi.

Аннотация

При обучении математике важно подробно освещать каждый вопрос. Применение первого большого предела также приносит некоторые удобства при расчете поверхностей. В этой статье показано, как удивительные предельные приложения используются для расчета поверхностей многоугольников и объемов твердых тел.

Ключевые слова

Замечательный предел, площадь, объем призмы, объем конуса.

Abstract

In the teaching of mathematics, it is important to cover each issue in detail. The application of the first great limit also brings several conveniences in the calculation of surfaces. This article shows how amazing limit applications are used to calculate the surfaces of polygons and the volumes of solids.

Key words

Perfect limit, area, volume of prism, volume of cone.

Oliy ta'lim muassasalarida oliy matematika fanini o'rganishda talabalarning oliy nazariy bilimlarini amaliyotga tadbiiq etish iqtisodga va texnikaga oid masalalarni yechish orqali ularning abstrakt va mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirish, teoremlarni isbotlashni eng ma'qul yo'lini izlab topish va ularni joriy etishda birinchi ajoyib limitdan foydalanish muhim rol o'ynaydi. Ushbu maqola geometriyaga oid ayrim teoremlarni isbotlari birinchi ajoyib limit tadbiiqidani foydalanib o'rganishga qaratiladi:

Teorema. Doiraning yuzi uni chegaralovchi aylana uzunligi bilan radiusi ko'paytmasini yarmiga teng ([1]).

Isboti. Bizga ma'lumki, bu teorema geometriya fanidan doiraga ichki va tashqi chizilgan muntazam n-burchak orqali isbotlanadi.

Biz quyida yuqorida keltirilgan tusuncha va oliy matematika faniga oid birinchi ajoyib limit orqali bu teoremlarni analitik isbotini keltiramiz.

Yetarlicha katta n larda yuqoridagi ko'pburchaklar perimetrlari aylana uzunliklaridan kam farq qiladi. Shuning uchun doiraning yuzi sifatida ko'pburchaklar yuzlarining limiti qabul qilinadi.

Birinchi ajoyib limit formulasi: $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ([3]). (Bu formulada burchak, radian o'lchovida hisoblanadi).

Agar $n \rightarrow \infty$ da $f(n) \rightarrow 0$ bo'lsa, xususiy holda

$$\lim_{f(n) \rightarrow 0} \frac{\sin f(n)}{f(n)} = 1 \quad (1)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Radiusi R bo'lgan aylana ichiga n tomonli $A_1A_2A_3 \dots A_n$ – ko'pburchak chizaylik (1-rasm). U holda birinchi rasmga ko'ra OA_1A_2 uchburchakda

$$OA_1=OA_2=R \text{ bo'lib, } \alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

bo'ladi. Bu uchburchakning yuzi

$$S = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \sin \alpha = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

ga teng. Ko'pburchakning yuzini S_n deb belgilasak, u holda $S_n = n \cdot S$ yoki

$$S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

bo'ladi. $n \rightarrow \infty$ ko'pburchakning yuzi unga tashqi chizilgan doirani yuziga intiladi, yani (1) tenglikka binoan

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{R^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot 2\pi = \pi R^2$$

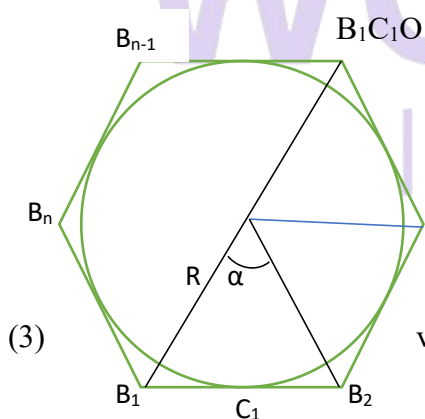
Endi radiusi R bo'lgan aylana ichiga n tomonli $B_1B_2B_3 \dots B_n$ – ko'pburchak chizaylik. Bunda

$$\alpha = \angle B_1OB_2 = \angle B_2OB_3 = \dots = \angle B_{n-1}OB_n = \angle B_nOB_1 = \frac{2\pi}{n} \text{ ga teng.}$$

Aylana radiusini R , ko'pburchakni B_1B_2 tomonini a deb olsak B_1OB_2 uchburchakning yuzi

$$S_{\nabla B_1OB_2} = \frac{1}{2} aR \quad (2)$$

bo'ladi (2-rasm).



B_1C_1O to'g'ri burchakli uchburchakda

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{B_1C_1}{OC_1} = \frac{a}{2R}$$

bo'lib, bunda

$$a = 2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

va (2) dan

$$S_{\nabla B_1OB_2} = \frac{1}{2} 2R^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R^2 \pi$$

tenglikka ega bo'lamiz. Tashqi chizilgan ko'pburchak yuzini S_n , deb belgilasak, u holda

$$S_n = nR^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

bo'ladi. Agar $n \rightarrow \infty$ sa, bu ko'pburchakning yuzi unga ichki chizilgan doiraning yuziga intiladi, ya'ni

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} nR^2 \frac{\pi}{n} = R^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \pi = \pi R^2$$

$$S = \pi R^2$$

bo'ladi.

Quyida birinchi ajoyib limitdan foydalanib, silindir va konusning hajmlari formulalarini keltirib chiqarish mumkunligini ko'rsatamiz.

Teorema. Doiraviy konusning hajmi asosining yuzi bilan balandligini ko'paytmasining uchdan biriga teng. ([1])

Isboti. Teorema isbotlash uchun qonusning asosidagi doirani n ta teng bo'lakga bo'lamiz. U holda doiraning yuzini chegaralovchi aylana ham n ta teng bo'lakka bo'linadi (3-rasm).

3-rasmdagi bo'linish nuqtalari S nuqta bilan tutashtirsak, konusga ichki chizilgan muntazam n -burchakli piramidaga ega bo'lamiz. Bu piramidaning hajmi $V'_n = n V'$. Bunda V' , $S_{OA_1A_2}$ - uchburchakli piramidaning hajmidan iborat.

$$V' = \frac{1}{3} S_{\nabla OA_1A_2} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{OA_1 \cdot OA_2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot h = \frac{R^2 \cdot h}{6} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

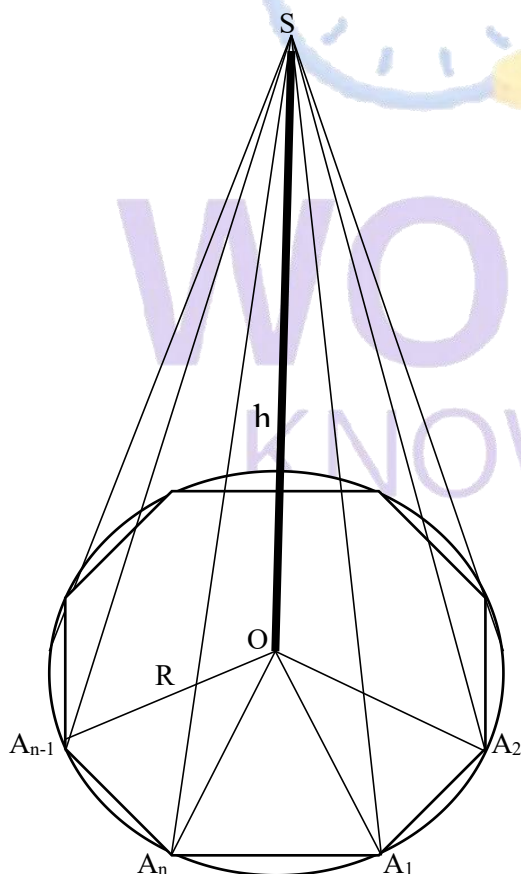
Bundan $V_n = n \cdot V' = n \cdot \frac{R^2}{6} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot h$ kelib chiqadi.

$$V_k = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{R^2}{6} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot h$$

$$= \frac{R^2 h}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot 2\pi = \frac{R^2}{6} \cdot h \cdot 2\pi$$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 h,$$

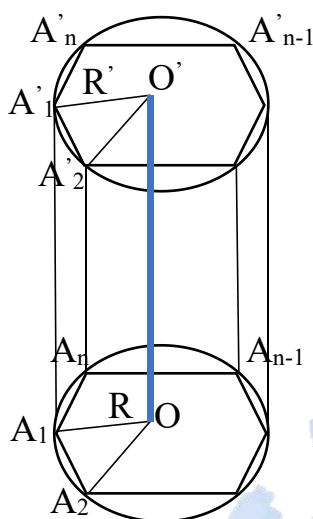
Ya'ni izlangan konusning hajmi $V_k = \frac{1}{3} \pi R^2 h$ dan iborat.



3-rasm

Teorema. Doiraviy silindrning hajmi asosining yuzi bilan balandligi ko'paytmasiga teng ([1]).

Isboti. Teoremani isbotlash uchun silindrning asoslaridagi doiralarni n ta teng bo'laklarga bo'lamiz (4-rasm).



4-rasm

U holda doiralarning yuzalari chegaralovchi aylanalar ham n ta teng bo'laklarga bo'linadi. Bo'linish nuqtalarini o'zaro mos nuqtalar bilan tutashtirsak, silindr ichki chizilgan muntazam n -burchakli prizmagacha bo'lamiz.

Bu prizmaning hajmi $V_n = n V'$ bo'lib, bunda V' , $S_{OA_1A_2}$ - uchburchakli prizmaning hajmidan iborat.

$$V' = S_{\triangle OA_1A_2} \cdot h = \frac{OA_1 \cdot OA_2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot h = \frac{R^2 \cdot h}{6} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Bundan

$$V_n = n \cdot V' = n \cdot \frac{R^2}{6} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot h$$

kelib chiqadi. U holda,

$$\begin{aligned} V_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{R^2}{6} \sin \frac{2\pi}{n} \cdot h \\ &= \frac{R^2 h}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot 2\pi = \frac{R^2}{2} \cdot h \cdot 2\pi = \pi R^2 h, \\ V_n &= \pi R^2 h. \end{aligned}$$

Demak, biz birinchi ajoyib limit tushunchasidan foydalanib doiraning yuzi, konus va silindrlarning hajmlari formulalarini osongina keltirib chiqardik.

Adabiyot

1. Dodajonov N.D., Jo'rayeva M.SH. Geometriya. I qism.-T.: O'qituvchi. 1996.
2. Toshpo'latov B.T. Oliy matematika – T.:Talqin. 2006.
3. Fixtengol's G.M. Matematik analiz asoslari. 1-tom. –T.: O'qituvchi. 1970.